Početní část 1 - 28.6.2021

1. Stačí hledat řešení v kvadrantu $x > 0, y > 0$. Jedná se o rovnici Bernoulliova typu, kterou vyřešíme tak, že obě strany vynásobíme faktorem $y^{-3/2}$ a provedeme substituci $z = y^{-1/2}$. Dostaneme

$$z' + \frac{z}{2x} = \frac{1}{2}$$

a dále násobíme integračním faktorem $\gamma = \sqrt{x}$, abychom dostali

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{x}z)' = \frac{\sqrt{x}}{2}, \\
&\sqrt{x}z - 1 = \int_1^x \frac{\sqrt{t}}{2}\, \mathrm{d}t \\
&\sqrt{x}z - 1 = \frac{x\sqrt{x}}{3} - \frac{1}{3}, \\
&z = \frac{2}{3\sqrt{x}} + \frac{x}{3}, \\
&y = \left(\frac{2}{3\sqrt{x}} + \frac{x}{3}\right)^{-2}, \\
&y = \frac{9x}{x^3 + 4x\sqrt{x} + 4}.
\end{aligned}$$

Ověříme zkouškou. Řešení je definováno na $(0, \infty)$ a nelze prodloužit, neboť v bodě $x = 0$ nemá zadaná rovnice smysl.

2. Nejprve si všimneme, že řada konverguje absolutně ze srovnávacího limitního kritéria porovnáním s geometrickou řadou s koeficientem $\frac{1}{2}$. Dále použijeme rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Tudíž

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-\frac{1}{2})^n}{n^2-1} &= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-\frac{1}{2})^n}{n-1} - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-\frac{1}{2})^n}{n+1} \\
&= -\frac{1}{4}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-\frac{1}{2})^{n-1}}{n-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-\frac{1}{2})^{n+1}}{n+1} \\
&= -\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\frac{1}{2})^n}{n} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-\frac{1}{2})^n}{n}.
\end{aligned}$$

Řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

konverguje pro $x \in (-1, 1)$ se součtem

$$-\ln(1-x),$$

neboť

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x},$$

$$\int \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln(1-x) + c,$$

a zřejmě $c = 0$. Máme tedy:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\frac{1}{2})^n}{n} = -\ln\frac{3}{2} = \ln\frac{2}{3}$$

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-\frac{1}{2})^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\frac{1}{2})^n}{n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \ln\frac{2}{3} + \frac{3}{8}.$$

Celkově je tedy součet roven

$$-\frac{1}{4}\ln\frac{2}{3} + \ln\frac{2}{3} + \frac{3}{8} = \frac{3}{4}\ln\frac{2}{3} + \frac{3}{8}.$$